UTM 図法について

1.　概要

地球楕円体を平面に投影することが、地図投影である。地図投影法には、地球に平面を置く「平射図法」、円錐をかぶせる「円錐図法」及び円筒をかぶせる「円筒図法」がある。また、距離を正しく投影するのは「正距図法」、面積を正しくするものを「正距図法」及び角度を正しくするものを「正角図法」と呼んでいる。国によっては正軸、斜軸及び横軸の投影が有利になることがある。

UTM(universal transverse mercator)図法とは、横円筒図法、正角図法、かつ、「割」図法であり、これはガウス・クリューゲル投影とも呼ばれている。地球の投影原点における平面距離(s)と球面距離(S)の比 m_o=s/S=0.9996 とすることで、割横円筒図法になる。このことを、概略に幾何学的にいえば、地球の平均半径を$R = \sqrt{MN}$としたときに、この楕円体にかぶせる円筒の半径 r は$r = m_o \cdot R = 0.9996R$とすることで、1/2,500 だけ短い半径となる。そのように割円筒にすれば、接円筒よりも投影範囲を増やすことができる。ただし、緯度は南緯 80 度、北緯 84 度の間で投影される。ここで、M=投影原点の子午線曲率半径、N=投影原点の卯酉線曲率半径という。

$$M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3} \quad \ldots (1.1)$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{a}{W} \quad \ldots (1.2)$$

ここで、a=長軸半径、ϕ＝測地緯度、e=第一離心率、$W = \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}$ である。

UTM 図法による平面直交座標系は世界的に利用され、わが国では、1/1 万地形図から 1/25,000 基本図，1/5 万編集図，1/20 万地勢図における投影に採用されている。

UTM 座標系は西経 180°を基準経線として、東回りに６°ごとの経度帯に区分し、全世界を 60 個の系に分割する。各経度帯内ではその中央経線と赤道との交点を座標原点として横メルカトル図法で投影する。中央経線から東西方向に離れるに従って距離ひずみが増大するので、平面上の距離の投影誤差の比率は±4/10,000 以内に収まるように考える。つまり、投影原点である中央経線上の縮率を 0.9996 に設定し、中央経線より東西に 180km 離れたところの縮率は 1.0000、そして 270km 離れた地点の縮率は 1.0004 となる。ＵＴM投影では中央経線より 270km までは、距離の相対精度が±4/10000 に収まるので、各６°幅の経度帯内で地球を平面とみなして投影することができる。なお、擬原点として、*x*座標（*N*軸）は北半球では北距＝０ｋｍ、南半球では北距＝10,000km とし x 座標は減少する。*y*座標（*E*軸）は南北半球とも北東距＝500km とし y 座標は東側へは増加、西側へは減少する。

（例 1）φ＝33°、GRS80 楕円体の半径 a= 6378137m,扁平率の逆数 1/f= 298.257 222 101 のときの、M,N 及び R を求めると、

（解）

φ	φ（RAD）	ρ	φ	R_A	1/f	R_B
33	0.575958653	57.29577951	3.141592654	6378137	298.2572	6356752

E^2	e	sin(φ)	Sin^2(φ)	W^2	W
0.006694	0.081819	0.544639	0.296632	0.998014	0.999007

RA(1−e^2)	M	N	R
6335439.327	6354357.320	6384479.188	6369400.448

距離の縮率(m)の計算は、次の式による。

$$m = \frac{s}{S} = m_o\left[1 + \frac{(y_1+y_2)^2}{8R^2{m_o}^2}\right] \qquad \cdots（1.3）$$

mo=投影原点の縮尺係数、$y_m = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ より、$y_1 + y_2 = 2y_m$ を距離の縮率に代入すると、

$$m = m_o\left[1 + \frac{{y_m}^2}{2R^2{m_o}^2}\right] \qquad \cdots（1.3.1）$$

この式より、各縮尺係数 m に対する範囲(y)を求める式に整理すると、

$$y_m = \sqrt{2}Rm_o\sqrt{\frac{m}{m_o} - 1} \qquad \cdots（1.3.2）$$

（例 2） UTM 図法において例 1 と同じ緯度の原点で、縮尺係数が m=0.9996,m=1.0000 及び m＝1.0004 となる原点からの最大距離（UTM の範囲）を求めよ。

（例 2-1） また、UTM では中央経線及び赤道が投影原点であるが、中央経線から左右に 3° まで投影されるがそのときの範囲（y_{km}）及び縮尺係数を求めよ。

（解）

m_o	m_1	m_2	m_3
0.9996	0.9996	1	1.0004

√2	√2Rm_o	√（m_1/m_o−1）	√（m_2/m_o−1）	√（m_3/m_o−1）
1.414214	9004089	0	0.020004	0.02829

y(km)	0	180	254

m=0.9996 の範囲は原点から 0ｋｍ（つまり原点付近）、m=1.0000 は原点から 180ｋｍの付近、及び m=1.0004 となるのは y=254ｋｍ付近である。

（例 2-1）

λ 経度(度)	λ（RAD）	y(=Rλ（RAD）)	m
3	0.052359878	333	1.00096721

経度差 3°での投影原点からの概略範囲（y_{km}）は 333ｋｍとなる。
また、そのときの縮尺係数は、1.00096721 である。

（UTM の特徴）

1）投影ゾーンは経度 360°を 6 度ごとに分けて、全地球を投影します。西経 180°（-180°）から開始し、東経 180°まで使用できる。

2）西経はグリニジ経度を０°とし右回りに測るが、西経にはーをつける。西経 180°（＝-180°）は、ゾーン 1 であり、その原点経度は-177°である。

3）西経における最後はゾーン 30 で、その原点経度は-3°である。

4）西経におけるゾーン番号と経度との関係において、経度は次式で表される。

(例 3：ゾーン 23 は経度いくらか？)

$$\lambda_w = (\mathrm{Zone}_w \times 6 - 3) - 180^o = (23 \times 6 - 3) - 180 = -45^o \quad \ldots（1.4）$$

5）逆に、経度（西経）から原点経度とゾーン番号を計算するには、次式による。

$$\mathrm{Zone}_W = \mathrm{Int}[\frac{180^o + \lambda_W}{6} + 0.5] \quad \ldots（1.5）$$

(例 4)原点経度西経＝-45°では、ゾーン＝23 になる。

6）東経はグリニジ経度を０°とし左回りに測る。UTM では東経 3 度の投影原点から出発する。原点経度３度のゾーンは 31 となる。

7）東経におけるゾーン番号と経度の関係は、次式で表される。

(例 5)ゾーン 53 の原点経度はいくらか。

$$\lambda_E = (\mathrm{Zone}_E - 30) \times 6 - 3 = (53 - 30) \times 6 - 3 = 135^o \quad \ldots（1.6）$$

8）中央経線のゾーン番号を求める式は、次のとおりである。

$$\mathrm{Zone}_E = \mathrm{Int}\left[\frac{\lambda_E}{6} + 0.5\right] + 30 \quad \ldots（1.7）$$

(例 6)中央経線＝135°のゾーン番号はいくらか。

$$\mathrm{Zone}_E = \mathrm{Int}\left[\frac{\lambda_E}{6} + 0.5\right] + 30 = \mathrm{Int}\left[\frac{135}{6} + 0.5\right] + 30 = 53$$

答え. 53 ゾーン

2. UTM による座標計算式

2.1 経緯度から UTM 座標への変換

$$x_N = F.N. + m_o[\Delta\varphi + \frac{\Delta\lambda^2}{2}N\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\Delta\lambda^4}{24}N\sin\varphi\cos^3\varphi(5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) +$$

$$\frac{\Delta\lambda^6}{720}N\sin\varphi\cos^5\varphi(61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330\eta^2t^2)] \qquad \ldots (2.1.1)$$

$$y_E = F.E. + m_o[\Delta\lambda \cdot N\cos\varphi + \frac{\Delta\lambda^3}{6}N\cos^3\varphi(1 - t^2 + \eta^2) +$$

$$\frac{\Delta\lambda^5}{120}N\cos^5\varphi(5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58t^2\eta^2)] \qquad \ldots (2.1.2)$$

ここで、北半球では擬原点は$F.N. = 0\mathrm{km}$, $F.E. = 500{,}000\mathrm{m}$であり、南半球では擬原点は$F.N. = 10{,}000\mathrm{km}$, $F.E. = 500\mathrm{km}$、N＝卯酉線曲率半径、$\Delta\varphi$はメートル単位、$\Delta\lambda$はラジアン単位である。

$$\gamma = \Delta\lambda \cdot \sin\varphi + \frac{\Delta\lambda^3}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi(1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \frac{\Delta\lambda^5}{15}\sin\varphi\cos^4\varphi(2 - t^2) \qquad \ldots (2.1.3)$$

なお、γはラジアン単位の子午線収差角(meridian difference)である。

ここで、

$$\Delta\varphi = a(1 - e^2)[k_1(\varphi - \varphi_o) - \frac{1}{2}k_2(\sin2\varphi - 2\varphi_o) + \frac{1}{4}k_3(\sin4\varphi - 4\varphi_o) - \frac{1}{6}k_4(\sin6\varphi - 6\varphi_o) + \frac{1}{8}k_5(\sin8\varphi - 8\varphi_o) - \frac{1}{10}k_6(\sin10\varphi - 10\varphi_o) + \cdots] \qquad \ldots (2.1.4)$$

ただし、以下の数値は GRS80 楕円体の値である。（式の誘導は付録を参照する。）

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= 1.005052501813087 \\ k_2 &= 0.005063108622224 \\ k_3 &= 0.000010627590263 \\ k_4 &= 0.000000020820379 \\ k_5 &= 0.000000000039324 \\ k_6 &= 0.000000000000071 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (2.1.5)$$

経度差　$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o$, λ_o: 投影原点の経度

$t = \tan\varphi$

$\eta = e'\cos\varphi$

第 2 離心率　$e' = \sqrt{\frac{a-b}{b}}$

投影原点の縮尺係数 $m_o = 0.9996$

長半径　$a = 6{,}378{,}137\mathrm{m}$

逆扁平率　$\frac{1}{f} = 298.257222101 \qquad \ldots (2.1.6)$

2.2　UTM 座標から経緯度への変換

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{y_E{'}}{2NM}t + \frac{y_E{'}^4}{24MN^3}t(5 + 3t^2 + \eta^2 - 9t^2\eta^2) - \frac{y_E{'}^6}{720MN^5}t(61 + 90t^2 + 45t^4)$$

…（2.2.1）

$$\lambda = \lambda_o + [\frac{y_E{'}}{N\cos\varphi} - \frac{y_E{'}^3}{6N^3\cos\varphi}(1 + 2t^2 + \eta^2) + \frac{y_E{'}^5}{120N^5\cos\varphi}(5 + 28t^2 + 24t^4)] \quad \text{…（2.2.2）}$$

$$\gamma = \frac{y_E{'}}{N}t - \frac{y_E{'}^3}{3N^3}t(1 + t^2 - \eta^2) + \frac{y_E{'}^5}{15N^5}t(2 + t^2 + 3t^4) \quad \text{…（2.2.3）}$$

ここで、

南北半球では　$y_E' = (y_E - 500{,}000[m])/m_o$

$m_o = 0.9996$

ただし、γ は子午線収差角である。

緯度 ϕ は未知数で、式（2.2.1）の右辺にも存在するので、次に示すニュートン・ラプソン公式により繰り返し計算により、新点から座標原点を通る子午線に下したその点の緯度 ϕ_1 を推定する。なお、D は ϕ_1 に対する角距離であり、弧長 D は原点の緯度 ϕ_o と新点の x_N/m_o を加えたものである。M は子午線曲率半径である。繰り返し計算で求めた ϕ_1 により

$$\varphi_1^{(i)} = \varphi_1^{(i-1)} - \frac{S^{(i-1)} - D}{M^{(i-1)}}$$

$$D = a(1 - e^2)\left(k_1\varphi_o - \frac{k_2}{2}\sin2\varphi_o + \frac{k_3}{4}\sin4\varphi_o - \frac{k_4}{6}\sin6\varphi_o + \frac{k_5}{8}\sin8\varphi_o - \frac{k_6}{10}\sin10\varphi_o + \cdots\right) + \frac{x'}{m_o}$$

$$S^{(i)} = a(1 - e^2)(k_1\varphi_1 - \frac{k_2\sin2\varphi_1^{(i)}}{2} + \frac{k_3\sin4\varphi_1^{(i)}}{4} - \frac{k_4\sin6\varphi_1^{(i)}}{6} + \frac{k_5\sin8\varphi_1^{(i)}}{8} - \frac{k_6\sin10\varphi_1^{(i)}}{10} + \cdots)$$

$$M^{(i)} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi_1^{(i)})^{3/2}} \quad \text{…（2.2.4）}$$

ここで、

北半球では　$x' = x_N - F.N. = x_N$

南半球では　$x' = x_S - F.N. = x_S - 10{,}000{,}000[m]$　…(2.2.5)

です。

[付録 A]　子午線弧長（S）の計算

まず、子午線の曲率半径は次式で表される。

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \quad \text{…（A-1）}$$

ここで、ρ(=M)である。

子午線長 S を積分して求めるため、子午線曲率半径 ρ(=M)を便宜上次のように展開して

おく。

$$\rho = a(1-e^2)(1-x)^{-m}$$

$$= a(1-e^2)[1 + mx + \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4!}x^4 +$$

$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{5!}x^5 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}{6!}x^6 + \cdots]$$

$$= a(1-e^2)[1 + \frac{3}{2}e^2\sin^2\varphi + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)}{2}e^4\sin^4\varphi + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)}{6}e^6\sin^6\varphi$$

$$+ \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)\left(\frac{3}{2}+3\right)}{24}e^8\sin^8\varphi + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)\left(\frac{3}{2}+3\right)\left(\frac{3}{2}+4\right)}{120}e^{10}\sin^{10}\varphi + \cdots]$$

$$= a(1-e^2)[1 + \frac{3}{2}e^2\sin^2\varphi + \frac{15}{8}e^4\sin^4\varphi + \frac{35}{16}e^6\sin^6\varphi + \frac{315}{128}e^8\sin^8\varphi + \frac{693}{256}e^{10}\sin^{10}\varphi + \cdots]$$

…(A-2)

上の式において、積分を簡単化するため$\sin^{2i}\varphi$を$\cos(2i\cdot\varphi)$の形で以下のように整理する。

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos2\varphi$$

$$\sin^4\varphi = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos2\varphi + \frac{1}{8}\cos4\varphi$$

そして、これらを掛け合わせると

$$\sin^6\varphi = \frac{3}{16} - \frac{7}{16}\cos2\varphi + \frac{1}{4}\cos^2 2\varphi + \frac{1}{16}\cos4\varphi - \frac{1}{16}\cos2\varphi\cos4\varphi$$

また、$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos2\alpha$　より

$$\frac{1}{4}\cos^2 2\varphi = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos4\varphi\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos4\varphi$$

さらに、$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)]$ の公式を利用し、

$$-\frac{1}{16}\cos2\varphi\cdot\cos4\varphi = -\frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}(\cos6\varphi + \cos2\varphi)\right] = -\frac{1}{32}\cos6\varphi - \frac{1}{32}\cos2\varphi$$

これらの式を$\sin^6\varphi$ に代入すると

$$\therefore \sin^6\varphi = \frac{5}{16} - \frac{15}{32}\cos2\varphi + \frac{3}{16}\cos4\varphi - \frac{1}{32}\cos6\varphi$$

同様に

$$\sin^8\varphi = \sin^6\varphi\sin^2\varphi = \frac{35}{128} - \frac{7}{16}\cos2\varphi + \frac{7}{32}\cos4\varphi - \frac{1}{16}\cos6\varphi + \frac{1}{128}\cos8\varphi$$

そして、

$$\therefore \boldsymbol{\sin^{10}\varphi = \frac{63}{256} - \frac{105}{256}\cos2\varphi + \frac{15}{64}\cos4\varphi - \frac{45}{512}\cos6\varphi + \frac{5}{256}\cos8\varphi - \frac{1}{521}\cos10\varphi} \qquad \text{… (A-3)}$$

以上求めた式を式（A-2）に代入すると、

$$\rho = a(1-e^2)[1 + \frac{3}{2}e^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos2\varphi\right) + \frac{15}{8}e^4(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos2\varphi + \frac{1}{8}\cos4\varphi)$$

$$+\frac{35}{16}e^6(\frac{5}{16}-\frac{15}{32}\cos 2\varphi+\frac{3}{16}\cos 4\varphi-\frac{1}{32}\cos 6\varphi)$$

$$+\frac{315}{128}e^8(\frac{35}{128}-\frac{7}{16}\cos 2\varphi+\frac{7}{32}\cos 4\varphi-\frac{1}{16}\cos 6\varphi+\frac{1}{128}\cos 8\varphi)$$

$$+\frac{693}{256}e^{10}\left(\frac{63}{256}-\frac{105}{256}\cos 2\varphi+\frac{15}{64}\cos 4\varphi-\frac{45}{512}\cos 6\varphi+\frac{5}{256}\cos 8\varphi-\frac{1}{512}\cos 10\varphi\right)+\cdots]$$

…（A-4）

そして$\mathbf{\cos(2i\cdot\varphi)}$の項で整理すると、

$$\boldsymbol{\rho=a(1-e^2)\left[\left(1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\frac{11025}{16384}e^8+\frac{43659}{65536}e^{10}\right)-\right.}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6+\frac{2205}{2048}e^8+\frac{72765}{65536}e^{10}\right)\cos 2\varphi+}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6+\frac{2205}{4096}e^8+\frac{10395}{16384}e^{10}\right)\cos 4\varphi-}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{35}{512}e^6+\frac{315}{2048}e^8+\frac{31185}{131072}e^{10}\right)\cos 6\varphi+}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{315}{16384}e^8+\frac{3465}{65536}e^{10}\right)\cos 8\varphi-}$$

$$\boldsymbol{\left.\left(\frac{693}{131072}e^{10}\right)\cos 10\varphi+\cdots\right]}$$

…（A-5）

$\therefore \int \rho\cdot d\varphi$

$$=a(1-e^2)[(1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\frac{11025}{16384}e^8+\frac{43659}{65536}e^{10})\varphi$$

$$-\frac{1}{2}(\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6+\frac{2205}{2048}e^8+\frac{72765}{65536}e^{10})\sin 2\varphi$$

$$+\frac{1}{4}(\frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6+\frac{2205}{4096}e^8+\frac{10395}{16384}e^{10})\sin 4\varphi$$

$$-\frac{1}{6}(\frac{35}{512}e^6+\frac{315}{2048}e^8+\frac{31185}{131072}e^{10})\sin 6\varphi$$

$$+\frac{1}{8}(\frac{315}{16384}e^8+\frac{3465}{65536}e^{10})\sin 8\varphi$$

$$-\frac{1}{10}\left(\frac{693}{131072}e^{10}\right)\sin 10\varphi \ldots] \qquad \ldots\text{(A-6)}$$

上の式は次式の値で表される。上の式で Bessel の要素で計算すると次の値になる。

$$\left.\begin{array}{l} k_1 = 1.00503730604552 \\ k_2 = 0.005047849237799 \\ k_3 = 0.000010563786819 \\ k_4 = 0.000000020633321 \\ k_5 = 0.000000000038853 \\ k_6 = 0.00000000000007 \end{array}\right\} \qquad \ldots\text{（A-7）}$$

ここで、

$$a = 6{,}377{,}397.155\mathrm{m}$$

$$b = 6{,}356{,}078.963\mathrm{m}$$

$$\frac{1}{f} = 299.1528128 \qquad \ldots\text{(A-8)}$$